

SICAK RİJİT BİR KILIFA YERLEŞTİRİLMİŞ İKİ KATMANLI KOMPOZİT SİLİNDİRİN ZAMANA BAĞLI ELASTİK DAVRANIŞI

Ahmet N. Eraslan¹ ve Tolga Akış²

¹Mühendislik Bilimleri Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

²İnşaat Mühendisliği Bölümü, Atılım Üniversitesi, Ankara

ABSTRACT

An analytical model is developed to estimate the transient elastic response of a two-layer solid cylinder with fixed ends placed in a hot rigid casing. The cylinder contains two layers that are in perfect contact and it gains energy from its surface by thermal contact with the rigid casing. As the heating takes place slowly the problem is amenable the use of uncoupled theory of elasticity. Under these conditions and presuppositions the distributions of temperature and stresses are estimated as a function of time and put into view in graphical forms. It is found that the axially and radially constrained boundaries create very large stresses in the assembly but the corresponding stress state is far away from yielding.

ÖZET

Sıcak rijit bir kılıf içine yerleştirilmiş ve uçları sabitlenmiş iki katmanlı dolu bir silindirin zamana bağlı termoelastik davranışının incelenmesi için analitik bir model geliştirilmiştir. Silindir aralarında mükemmel bir temas sağlanan iki katmandan oluşmakta ve termal temasla dış yüzeyinden enerji kazanmaktadır. Sıcaklık artışı uzun bir süreçte yavaşça gerçekleştiğinden kuplajsız elastisite teorisinin kullanılması mümkün olmuştur. Bu koşullar ve varsayımlar doğrultusunda zamana bağlı sıcaklık ve gerilme dağılımları elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir. Kompozit silindirin eksenel ve radyal yönde kısıtlanması büyük gerilmeler oluşturmaya rağmen gerilme durumunun silindirde akmaya yol açmadığı bulunmuştur.

GİRİŞ

Silindir, tüp, shaft, disk, küresel kabuk ve plaka gibi temel elemanların imalat sektöründe kullanımı oldukça yaygındır. Özellikle makine, havacılık ve otomotiv sanayinde kullanılan bu elemanların mekanik analizi ve tasarımı, amaca yönelik üretim açısından önem arz eden konular arasında yer almaktadır. Kompozit malzemelerden yapılan türlerinin de bulunduğu söz konusu elemanların farklı yükleme ve sınır koşulu durumlarındaki gerilme ve yer değiştirme dağılımlarının belirlenmesi birçok farklı mühendislik uygulaması için önemlidir. Tüm bunların yanı sıra, bu elemanların özellikle sıcaklık etkisi altındaki davranışlarının belirlenmesi uygulamalı mekanikteki temel problemler arasında yer almaktadır.

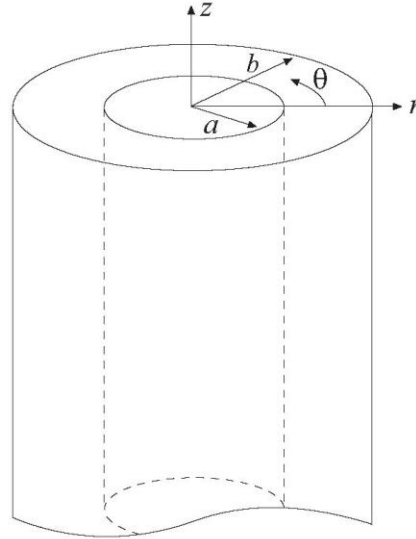
Sıcaklık etkisi altındaki silindirlerin zamana bağlı elastik davranışı problemi daha önce birçok çalışmada incelenmiştir [1-4]. Bu çalışmaların yanı sıra kompozit sistemlerin zamana bağlı sıcaklık değişimleri de farklı metotlar kullanılarak ele alınmıştır. Bunlar arasında en yaygın olarak kullanılan analitik metotlar Green Fonksiyonları, Ortogonal Açılımlar ve Laplace Dönüşümüdür. Bu tekniklerin uygulanması ve başka diğer yöntemlerin kullanımı Monte [5], Sun ve Wichman [6] ve Lu ve diğerleri [7] nin çalışmalarında yer almaktadır. Bu çalışmaların yanında iki farklı malzemeden oluşan sonsuz uzunluktaki içi boş dairesel silindirlerin zaman

bağlı elastik davranışları birçok farklı araştırmacı tarafından incelenmiştir [8-12]. Tüm bunların yanı sıra, ele alınan konu ile yakından ilgili bir çalışmada Pardo ve diğerleri [13] iki katmanlı kompozit dolu silindirlerin zamana bağlı termoelastik davranışını Özışık [14] ve Boley ve Weiner [2] in çalışmalarında yer alan sırasıyla zamana bağlı ısı transferi ve termoelastik yaklaşımları kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada söz konusu problem için daha önce incelenmemiş çok farklı bir sınır koşulu için, gerçek mühendislik malzemelerinin fiziksel özelliklerinin kullanıldığı modern bir çözüm yöntemiyle analitik çözüm elde edilmiştir. Bu bağlamda sıcak rijit bir kılıf içine yerleştirilmiş ve uçları sabitlenmiş iki katmanlı dolu bir silindir ele alınmıştır. Silindirin iki katmanının arasında mükemmel bir temas sağlandığı ve silindir ile rijit kılıf arasındaki birleşme yüzeyi sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Rijit kılıftan dolayı radyal yönde hareketi kısıtlanan kompozit sistemin ilk sıcaklığının T_0 olduğu ve T_c sıcaklığındaki rijit kılıftan kazandığı enerji ile zamanla sıcaklığının arttığı (ısındığı) varsayılmıştır. Söz konusu sıcaklık artışı uzun bir süreçte yavaşça gerçekleştiğinden kuplajsız elastisite teorisinin kullanılması mümkün olmuştur.

Arayüz yarıçapı a , dış yarıçapı b olan iki katmanlı silindirde zamana bağlı sıcaklık dağılımını elde etmek için değişkenlerin ayrılması metodu kullanılmıştır. Her iki katman için de aynı özdeğerlerin kullanılmasını sağlayan birleşik bir formülasyon sonunda elde edilen özdeğer denklemi sayısal olarak çözülmüş ve sonrasında katmanların sıcaklık dağılımı ifadeleri bulunmuştur. Daha sonra termoelastik çözüme geçilmiştir. Bulunan sıcaklık dağılımları kullanılarak her iki tabaka için ayrı ayrı olmak üzere ısıl gerilme ve radyal yöndeki yer değiştirme ifadeleri elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

SICAKLIK DAĞILIMI

Ele alınan problem için kullanılan koordinat sistemi ve iki katmanlı uzun silindirin boyutları Şekil 1’de gösterilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi kompozit sistem iç silindir ($0 \leq r \leq a$) ve dış silindir ($a \leq r \leq b$) olmak üzere iki katmandan oluşmaktadır.



Şekil 1. Silindirik koordinat sistemi ve uzun silindirin boyutları.

Başlangıçta ($t = 0$ zamanında) her iki silindir de $T_0 > 0$ sıcaklığına sahiptir. Daha sonra kompozit silindir sıcaklığı $T_c > T_0$ olan rijit bir kılıfa yerleştirilmiştir. $t > 0$ dan itibaren

silindir dış yüzeyinden enerji kazanmaya başlamaktadır. İç ve dış katmandaki sıcaklık dağılımlarını veren ısı transferi denklemleri aşağıdaki gibidir [14]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\alpha_{T1}}{r} \left[\frac{\partial T_1}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} \right] \quad 0 \leq r < a \text{ aralığında ve } t > 0 \text{ değerleri için} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\alpha_{T2}}{r} \left[\frac{\partial T_2}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} \right] \quad a < r < b \text{ aralığında ve } t > 0 \text{ değerleri için} \quad (2)$$

Yukarıdaki denklemlerde $T_1(r,t)$ ve $T_2(r,t)$ sırasıyla iç ve dış katmanlardaki sıcaklık dağılımları, α_{T1} ve α_{T2} yine iç ve dış katmanların ısıl yayılma katsayılarıdır. Problemin sınır ve arayüz koşulları ise

$$T_1(0,t) = \text{sonlu} \quad (3)$$

$$T_2(b,t) = T_c \quad (4)$$

$$T_1(a,t) = T_2(a,t) \quad (5)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(a,t)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2(a,t)}{\partial r} \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir. Son olarak, problem başlangıç koşulları

$$T_1(r,0) = T_0, \quad 0 \leq r \leq a \quad (7)$$

$$T_2(r,0) = T_0, \quad a \leq r \leq b \quad (8)$$

şeklindedir. Bu aşamada aşağıda yer alan yeni bağımlı değişkenler tanımlanmıştır:

$$\phi_1(r,t) = T_1(r,t) - T_c \quad (9)$$

$$\phi_2(r,t) = T_2(r,t) - T_c \quad (10)$$

Yukarıdaki iki denklemde yer alan ifadeler (1) ve (2) nolu denklemlerde yerlerine konulduğunda

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\alpha_{T1}}{r} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} \right] \quad 0 \leq r < a \text{ aralığında, } t > 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\alpha_{T2}}{r} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} \right] \quad a < r < b \text{ aralığında, } t > 0 \quad (12)$$

ifadeleri bulunur. Sınır, arayüz ve başlangıç koşulları da yeni bağımlı değişkenler cinsinden benzer yöntemle elde edilir. Çözüm değişkenlerin ayrılması metodu kullanılarak bulunur. Bunun için

$$\phi_1(r,t) = \theta_1(t)R_1(r) \quad (13)$$

$$\phi_2(r,t) = \theta_2(t)R_2(r) \quad (14)$$

tanımları yapılmıştır. Yukarıdaki ifadeler (11) ve (12) nolu denklemlerde yerlerine konulduğunda

$$\frac{1}{\theta_{1n}} \frac{d\theta_{1n}}{dt} = \frac{\alpha_{T1}}{R_{1n}r} \left[\frac{dR_{1n}}{dr} + r \frac{d^2 R_{1n}}{dr^2} \right] = -\lambda_n^2 \quad (15)$$

$$\frac{1}{\theta_{2n}} \frac{d\theta_{2n}}{dt} = \frac{\alpha_{T2}}{R_{2n}r} \left[\frac{dR_{2n}}{dr} + r \frac{d^2 R_{2n}}{dr^2} \right] = -\lambda_n^2 \quad (16)$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemlerde yer alan λ_n ($n=1, 2, \dots$) sistemin özdeğerleridir. Yukarıdaki denklemler

$$\frac{d\theta_{1n}}{dt} + \lambda_n^2 \theta_{1n} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{r} \left[\frac{dR_{1n}}{dr} + r \frac{d^2 R_{1n}}{dr^2} \right] + \frac{\lambda_n^2}{\alpha_{T1}} R_{1n} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d\theta_{2n}}{dt} + \lambda_n^2 \theta_{2n} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{r} \left[\frac{dR_{2n}}{dr} + r \frac{d^2 R_{2n}}{dr^2} \right] + \frac{\lambda_n^2}{\alpha_{T2}} R_{2n} = 0 \quad (18)$$

şeklinde ayrılırlar. Ayrılmış denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\theta_{1n} = C_{1n} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \theta_{2n} = C_{2n} e^{-\lambda_n^2 t} \quad (19)$$

$$R_{1n} = A_{1n} J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\sqrt{\alpha_{T1}}} \right) + A_{2n} Y_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\sqrt{\alpha_{T1}}} \right) \quad (20)$$

$$R_{2n} = B_{1n} J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) + B_{2n} Y_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) \quad (21)$$

Yukarıdaki denklemlerde $J_0(r)$ ve $Y_0(r)$ ifadeleri sırasıyla birinci türden-sıfırıncı dereceden ve ikinci türden-sıfırıncı dereceden Bessel fonksiyonlarıdır. Burada $A_{2n} = 0$ olur ve $A_{1n} = 1$ olarak alındığında, sınır ve arayüz koşullarının uygulanmasıyla elde edilen üç homojen denklemin katsayılarının determinantının alınıp sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki özdeğer denklemi bulunur:

$$\begin{aligned} Y_0(\eta \lambda_n) [KJ_0(\gamma \lambda_n) J_1(\beta \lambda_n) - J_0(\beta \lambda_n) J_1(\gamma \lambda_n)] \\ - J_0(\eta \lambda_n) [KJ_1(\beta \lambda_n) Y_0(\gamma \lambda_n) - J_0(\beta \lambda_n) Y_1(\gamma \lambda_n)] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Yukarıdaki denklemin sayısal çözümü ile elde edilen kökler sistemin özdeğerlerini verir. Genel çözüm

$$\phi_1(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t} R_{1n}(r) \quad (23)$$

$$\phi_2(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t} R_{2n}(r) \quad (24)$$

olarak ifade edilir. Son olarak başlangıç koşulları ve ortogonalite özelliği kullanılarak bulunan $\phi_1(r, t)$ ve $\phi_2(r, t)$ ifadeleri aşağıdaki denklemlere konularak her iki katman için sıcaklık dağılımları elde edilir:

$$T_1(r, t) = \phi_1(r, t) + T_C \quad (25)$$

$$T_2(r, t) = \phi_2(r, t) + T_C \quad (26)$$

ELASTİK ÇÖZÜM

Daha önce belirtildiği gibi, silindirdeki sıcaklık artışının uzun bir süreçte yavaşça gerçekleşmesi kuplajsız elastisite teorisinin kullanılmasına imkan sağlamıştır. Genelleştirilmiş Hooke denklemleri, birim şekil değiştirme-yer değiştirme ifadeleri ve radyal yöndeki denge denklemi her iki katman için de elde edilen elastik çözümün temel denklemlerini oluşturmaktadır. Elastik çözüm elde edilirken boyutsuz veya normalize edilmiş değişkenler kullanılmıştır. Bunlar arasında $\bar{r} = r/b$ boyutsuz radyal koordinat, $\tau = \alpha_{T1}t/b$ boyutsuz zaman, $\bar{T}_j = T_j/T_0$ boyutsuz sıcaklık, $\bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j E_1/\sigma_{01}$ normalize edilmiş birim şekil değiştirme bileşeni, $\bar{\sigma}_j = \sigma_j/\sigma_{01}$ boyutsuz gerilme bileşeni, $\bar{u} = E_1 u/(\sigma_{01}b)$ boyutsuz yer değiştirme, $\bar{\alpha}_j = E_1 \alpha_j T_0/\sigma_{01}$ boyutsuz ısı genleşme katsayısı olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $\bar{E} = E_1/E_2$ elastisite modülü oranı, ν_j Poisson oranı ve σ_{01} de eksenel akma limitidir.

Şekil değiştirme durumunda eksenel yöndeki şekil değiştirme bileşeni sıfırdır ($\varepsilon_z = 0$). Bu durumda eksenel gerilme $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha(T - T_0)$ şeklinde bulunur. İç katman için genelleştirilmiş Hooke kanunu ve birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak yukarıda verilen eksenel gerilme ifadesinin yerine yazılması ile yer değiştirme cinsinden radyal ve teğetsel gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \left[\frac{\nu_1 \bar{u}}{\bar{r}} + (1-\nu_1) \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} \right] - \frac{\bar{\alpha}_1(\bar{T}_1 - 1)}{1-2\nu_1} \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \left[\frac{(1-\nu_1)\bar{u}}{\bar{r}} + \nu_1 \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} \right] - \frac{\bar{\alpha}_1(\bar{T}_1 - 1)}{1-2\nu_1} \quad (28)$$

Yukarıdaki gerilme ifadeleri radyal yöndeki denge denkleminde yerlerine yazıldığında iç katman için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} - \bar{u} = \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \bar{\alpha}_1 \bar{r}^2 \frac{d\bar{T}_1}{d\bar{r}} \quad (29)$$

Bu denklemin genel çözümü

$$\bar{u}(\bar{r}, \tau) = C_1 \bar{r} + \frac{C_2}{\bar{r}} + \frac{\bar{\alpha}_1(1+\nu_1)}{1-\nu_1} \frac{F(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}} \quad (30)$$

şeklindedir. Burada C_1 ve C_2 integral sabitleridir. Ayrıca

$$F(\bar{r}, \tau) = \int_0^{\bar{r}} \xi \bar{T}_1(\xi, \tau) d\xi = \bar{r} \sqrt{\alpha_{T1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 \tau} \left[J_1 \left(\frac{\lambda_n \bar{r}}{\sqrt{\alpha_{T1}}} \right) \right] \quad (31)$$

olarak tanımlanır. Silindirin merkezinde gerilmelerin tanımlı olabilmesi ve radyal yöndeki yer değiştirmenin sıfır olabilmesi için $C_2 = 0$ olmalıdır. Böylece iç katman için gerilme ve yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\bar{u}(\bar{r}, \tau) = C_1 \bar{r} + \frac{\bar{\alpha}_1(1+\nu_1)}{1-\nu_1} \frac{F(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}} \quad (32)$$

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \tau) = \frac{C_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} - \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{r}} \left[\frac{F(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}(1-\nu_1)} - \frac{F'(\bar{r}, \tau)}{1-2\nu_1} \right] - \frac{\bar{\alpha}_1[\bar{T}_1(\bar{r}, \tau) - 1]}{1-2\nu_1} \quad (33)$$

$$\bar{\sigma}_\theta(\bar{r}, \tau) = \frac{C_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{r}(1-\nu_1)} \left[\frac{F(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}} + \frac{\nu_1 F'(\bar{r}, \tau)}{1-2\nu_1} \right] - \frac{\bar{\alpha}_1 [\bar{T}_1(\bar{r}, \tau) - 1]}{1-2\nu_1} \quad (34)$$

$$\bar{\sigma}_z(\bar{r}, \tau) = \frac{2C_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} + \frac{\bar{\alpha}_1\nu_1 F'(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}(1-\nu_1)(1-2\nu_1)} - \frac{\bar{\alpha}_1 [\bar{T}_1(\bar{r}, \tau) - 1]}{1-2\nu_1} \quad (35)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen $F'(\bar{r}, \tau) = \bar{r}\bar{T}_1'(\bar{r}, \tau)$ olarak ifade edilebilir. Benzer bir yöntemle dış silindir katmanı için gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \tau) = \frac{C_3}{\bar{E}(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} - \frac{C_4}{\bar{E}\bar{r}^2(1+\nu_2)} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{E}\bar{r}} \left[\frac{G(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}(1-\nu_2)} - \frac{G'(\bar{r}, \tau)}{1-2\nu_2} \right] - \frac{\bar{\alpha}_2 [\bar{T}_2(\bar{r}, \tau) - 1]}{\bar{E}(1-2\nu_2)} \quad (36)$$

$$\bar{\sigma}_\theta(\bar{r}, \tau) = \frac{C_3}{\bar{E}(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} + \frac{C_4}{\bar{E}\bar{r}^2(1+\nu_2)} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{E}\bar{r}} \left[\frac{G(\bar{r}, \tau)}{\bar{r}(1-\nu_2)} + \frac{\nu_2 G'(\bar{r}, \tau)}{(1-\nu_2)(1-2\nu_2)} \right] - \frac{\bar{\alpha}_2 [\bar{T}_2(\bar{r}, \tau) - 1]}{\bar{E}(1-2\nu_2)} \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}_z(\bar{r}, \tau) = \frac{2C_3\nu_2}{\bar{E}(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} + \frac{\bar{\alpha}_2\nu_2 G'(\bar{r}, \tau)}{\bar{E}\bar{r}(1-\nu_2)(1-2\nu_2)} - \frac{\bar{\alpha}_2 [\bar{T}_2(\bar{r}, \tau) - 1]}{\bar{E}(1-2\nu_2)} \quad (38)$$

Burada C_3 ve C_4 integral sabitleri olup

$$G(\bar{r}, \tau) = \int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \xi \bar{T}_2(\xi, \tau) d\xi = \sqrt{\alpha_{T2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 \tau} \left\{ \begin{aligned} & B_{1n} \left[\bar{r} J_1 \left(\frac{\lambda_n \bar{r}}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) - \bar{a} J_1 \left(\frac{\lambda_n \bar{a}}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) \right] \\ & + B_{2n} \left[\bar{r} Y_1 \left(\frac{\lambda_n \bar{r}}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) - \bar{a} Y_1 \left(\frac{\lambda_n \bar{a}}{\sqrt{\alpha_{T2}}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

tanımı yapılmıştır. Ayrıca $G'(\bar{r}, \tau) = \bar{r}\bar{T}_2'(\bar{r}, \tau)$ olarak ifade edilebilir. Probleme ait integral sabitleri (C_1 , C_3 ve C_4) aşağıdaki arayüz ve sınır koşulları ile bulunabilir:

$$\bar{u}^I(\bar{a}, \tau) = \bar{u}^{II}(\bar{a}, \tau), \quad \bar{\sigma}_r^I(\bar{a}, \tau) = \bar{\sigma}_r^{II}(\bar{a}, \tau), \quad \bar{u}^{II}(1, \tau) = 0 \quad (40)$$

Burada I ve II üst indisleri iç ve dış silindir katmanlarını göstermektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Yapılan hesaplamalarda alüminyum (AL) ve pirinç (PR) malzemelerinin fiziksel özellikleri kullanılmıştır. Bu özellikler Çizelge 1'de verilmektedir. Örnek olarak içi alüminyum, dışı pirinç olan bir kompozit silindir ele alınmıştır. Silindirin ilk sıcaklığının $T_0 = 50^\circ C$, rijit kılıfın sabit sıcaklığının ise $T_c = 100^\circ C$ olduğu varsayılmış, arayüz yarıçapı da $\bar{a} = 0.4$ olarak alınmıştır. Bu değerler kullanılarak $\bar{\alpha}_1 = 0.805$ ve $\bar{\alpha}_2 = 0.7315$ olarak hesaplanmıştır. Kompozit silindirin zaman bağlı sıcaklık dağılımı Şekil 2'de yer almaktadır. Grafikte görüldüğü gibi sistemin sıcaklığı dış yüzeyinden yavaş bir şekilde artmakta ve $\tau = 6.1$ boyutsuz zamanında sabit sıcaklığa erişmektedir. Bu sıcaklık dağılımına ait radyal, teğetsel ve eksenel yöndeki gerilmeler Şekil 3, 4 ve 5'te verilmiştir. Grafiklerde görüldüğü gibi $\bar{a} = 0.4$ 'de radyal gerilme arayüz koşulundan dolayı sürekli ancak teğetsel ve eksenel gerilmeler bu koordinatta sürekli değildir. Bununla birlikte kompozit silindir radyal ve eksenel yönde genişleyemediğinden dolayı gerilme bileşenlerinin değerleri akma gerilmesine göre oldukça büyük, işaretleri de negatiftir. Gerilme bileşenlerinin değerleri büyük olmasına

rağmen, Şekil 6'daki von Mises gerilme dağılımlarında da görüldüğü gibi, silindirde herhangi bir plastikleşme olmamıştır. Bu grafikteki von Mises değerleri iç katman için

$$\bar{\sigma}_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)^2]} \quad (41)$$

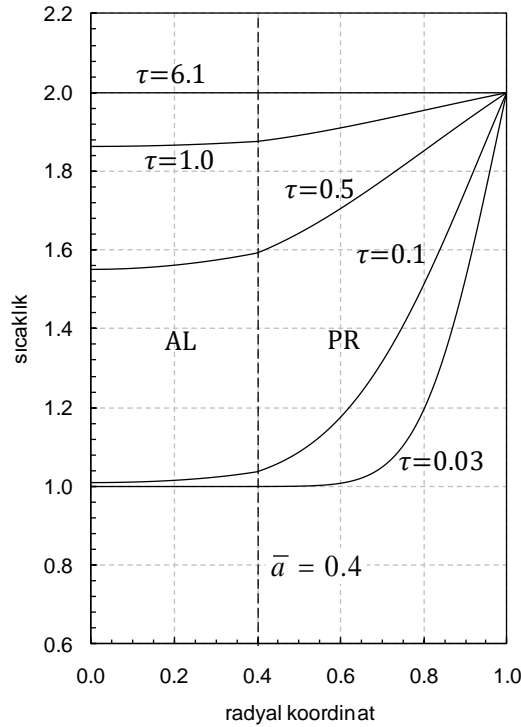
dış katman için ise

$$\bar{\sigma}_{vM} = \left(\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}} \right) \sqrt{\frac{1}{2}[(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)^2]} \quad (42)$$

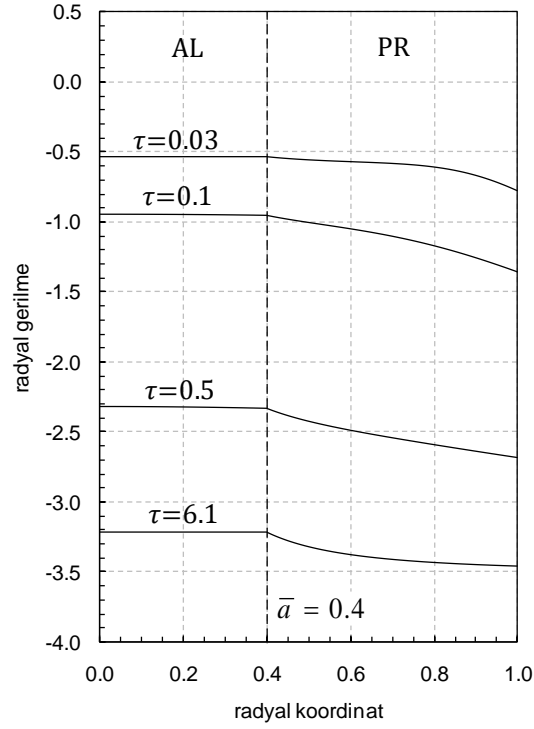
bağıntılarıyla hesaplanmıştır. Bilindiği gibi kompozit silindirde plastikleşmenin başlaması için $\bar{\sigma}_{vM} \geq 1$ olması gerekmektedir.

Çizelge 1. Kullanılan malzemelerin fiziksel özellikleri

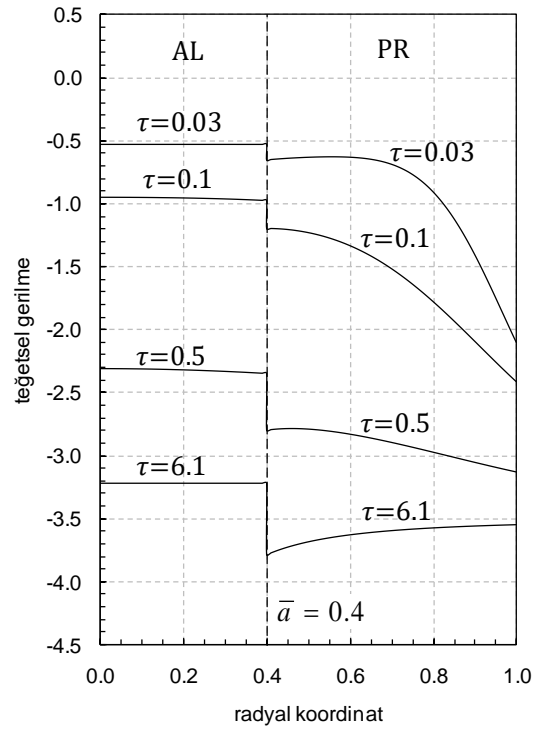
Fiziksel Özellik	Sembol	Birim	Alüminyum (AL)	Pirinç (PR)
Isıl Yayılma Katsayısı	α_T	m^2 / s	9.5×10^{-5}	3.4×10^{-5}
Isıl İletim Katsayısı	k	$W / (m.^0 K)$	230	110
Elastisite Modülü	E	GPa	70	105
Poisson Oranı	ν	-	0.35	0.35
Isıl Genleşme Katsayısı	α	$1/^0C$	23.0×10^{-6}	20.9×10^{-6}
Eksenel Akma Gerilmesi	σ_0	MPa	100	410



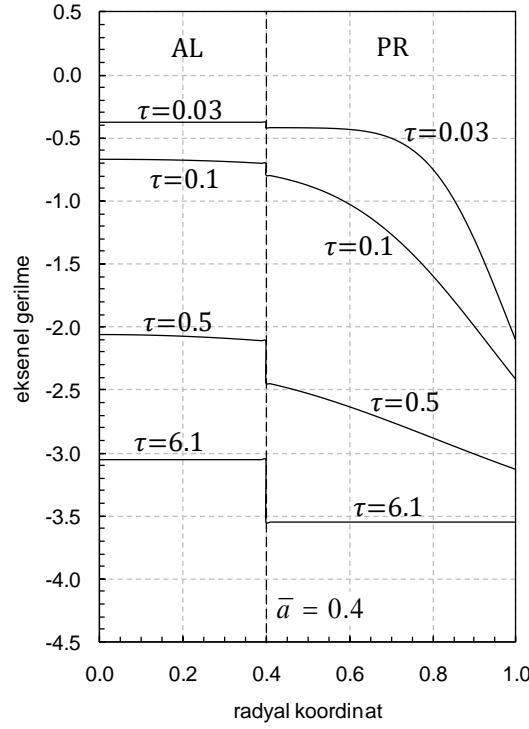
Şekil 2. Radyal ve eksenel yönde sabitlenmiş alüminyum (AL) - pirinç (PR) katmanlı silindirde farklı zamanlardaki boyutsuz sıcaklık dağılımı ($\bar{a} = 0.4$).



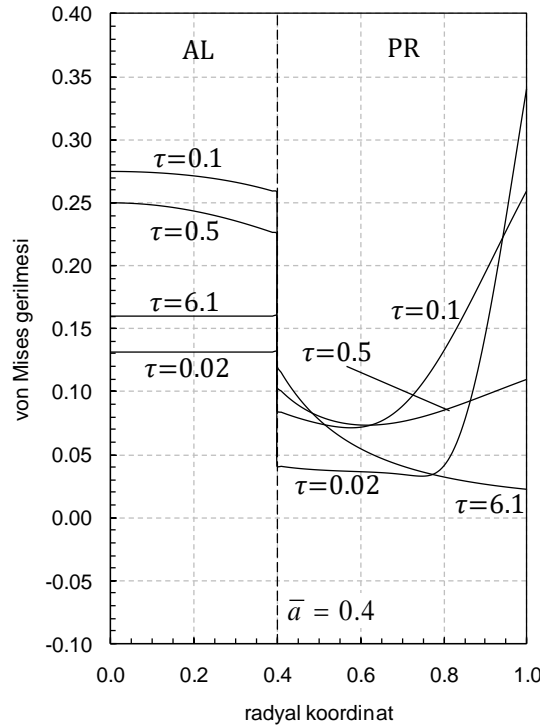
Şekil 3. Radyal ve eksenel yönde sabitlenmiş alüminyum (AL) - pirinç (PR) katmanlı silindirde farklı zamanlardaki boyutsuz radyal gerilme dağılımı ($\bar{a} = 0.4$).



Şekil 4. Radyal ve eksenel yönde sabitlenmiş alüminyum (AL) - pirinç (PR) katmanlı silindirde farklı zamanlardaki boyutsuz teğetsel gerilme dağılımı ($\bar{a} = 0.4$).



Şekil 5. Radyal ve eksenel yönde sabitlenmiş alüminyum (AL) - pirinç (PR) katmanlı silindirde farklı zamanlardaki boyutsuz eksenel gerilme dağılımı ($\bar{a} = 0.4$).



Şekil 6. Radyal ve eksenel yönde sabitlenmiş alüminyum (AL) - pirinç (PR) katmanlı silindirde farklı zamanlardaki boyutsuz von Mises gerilme dağılımı ($\bar{a} = 0.4$).

SONUÇ

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde eksenel ve radyal yönde kısıtlanmış iki tabakalı silindirde her yönde yüksek gerilme değerleri elde edilmesine rağmen zamana bağlı von Mises gerilme değişkeninin akma limit gerilmesinden oldukça düşük değerlere sahip olduğu gözlenmiştir. Bu ilginç sonucun en önemli sebebi gerilme dağılımlarının hepsinin negatif değerlere sahip olması ve birbirlerine yakın büyüklüklerde olmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959.
- [2] B.A. Boley, J.H. Weiner, *Theory of Thermal Stresses*, Wiley, 1960.
- [3] N. Noda, R.B. Hetnarski, Y. Tanigawa, *Thermal Stresses*, Taylor and Francis, 2003.
- [4] B.H. Hetnarski, M.R. Eslami, *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications*, Springer, 2009.
- [5] F.D. Monte, An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 45 (2002) 1333-1343.
- [6] Y. Sun, I.S. Wichman, On transient heat conduction in a one-dimensional composite Slab, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 47 (2004) 1555-1559.
- [7] X. Lu, P. Tervola, M. Viljanen, Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 49 (2006), 341-348.
- [8] Y. Yu-Ching, C. Cha'o-Kuang, Thermoelastic transient response of infinitely long annular cylinder composed of two different materials, *Int. J. Eng. Sci.* 24 (1986) 569-581.
- [9] K.C. Jane, Z.Y. Lee, Thermoelastic transient response of an infinitely long annular multilayered cylinder, *Mech. Res. Comm.* 26 (1999) 709-718.
- [10] Z.Y. Lee, C.K. Chen, C.I. Hung, Transient thermal stress analysis of multilayered hollow cylinder, *Acta Mechanica*. 151 (2001) 75-88.
- [11] Z.Y. Lee, Generalized coupled transient thermoelastic problem of multilayered hollow cylinder with hybrid boundary conditions, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*. 33 (2006) 518-528.
- [12] D.S. Mashat, A.M. Zenkour, K.A. Elsibai, Transient response of multilayered hollow cylinder using various theories of generalized thermoelasticity, *Natural Science*. 2 (2010) 1171-1179.
- [13] E. Pardo, G.S. Sarmiento, P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, Analytical solution for unsteady thermal stresses in an infinite cylinder composed of two materials, *J. Thermal Stresses*. 10 (1987) 29-43.
- [14] M.N. Özışık, *Heat Conduction*, John Wiley, 1980.